数学Ⅱ　微分　方程式と不等式　演習プリント

1

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3-6x+7=0$　(2)　$x^3+2x^2+x=0$

(3)　$x^3+4x^2+6x-1=0$　(4)　$x^4+2x^3-3x^2-4x+1=0$

2

3 次方程式 $x^3-12x-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

3

曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点を共有するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

4

次の方程式は与えられた区間に実数解をもつことを示せ。

(1)　$2x^3+x^2-5x+1=0$　$0<x<1$

(2)　$x^3-3x-1=0$　$-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$

5

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき $2x^3+1 \geqq 3x^2$　(2)　$x>1$ のとき $x^3-3x^2+6x-4>0$

6

不等式 $x^4-4x^3+28>0$ を証明せよ。

7

方程式 $2x^3-3x^2-36x=a$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

8

4 次方程式 $x^4-4x^3-2x^2+12x-a=0$ が異なる 4 個の実数解をもち，そのうちの 2 個は正，残りの 2 個は負であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

9

方程式 $x^3-3ax+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$

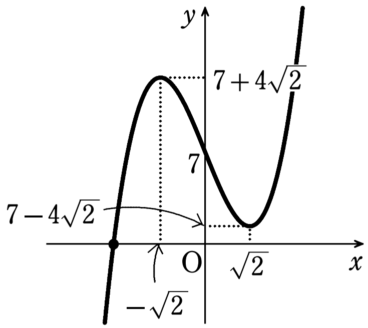
(1)　関数 $y=x^3-6x+7$ を考える。

$$y'=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 $7+4\sqrt{2}$	$\searrow$	極小 $7-4\sqrt{2}$	$\nearrow$



よって，この関数のグラフは右図のようになり，

このグラフと x 軸の共有点の個数は　　1 個

ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　　1 個

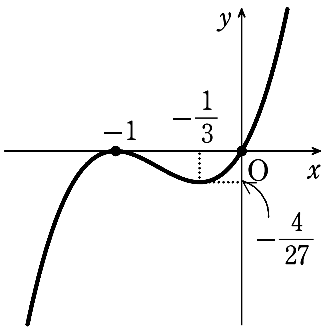
(2)　関数 $y=x^3+2x^2+x$ を考える。

$$y'=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ -\dfrac{1}{3}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 $-\dfrac{4}{27}$	$\nearrow$



よって，この関数のグラフは右図のようになり，

このグラフと x 軸の共有点の個数は　　2 個

ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　　2 個

別解　方程式の左辺を因数分解すると　　$x(x+1)^2=0$

これを解くと　$x=0,\ -1$

よって，方程式の異なる実数解の個数は　　2 個

(3)　関数 $y=x^3+4x^2+6x-1$ を考える。

$$y'=3x^2+8x+6=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

$y'>0$ であるから，y は常に単調に増加する。

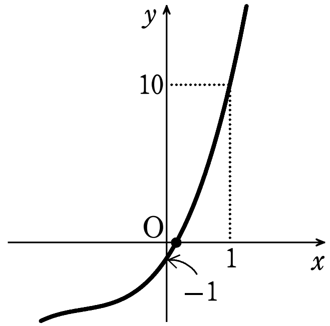
また　　$x=0$ のとき　$y=-1$，

　　　　$x=1$ のとき　$y=10$

よって，この関数のグラフは右図のようになり，

このグラフと x 軸の共有点の個数は　　1 個

ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　　1 個



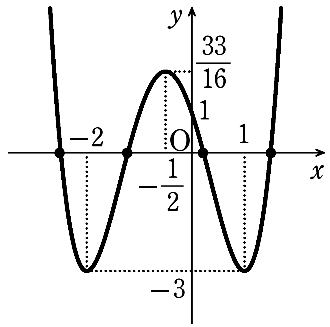
(4)　関数 $y=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ を考える。

$$y'=4x^3+6x^2-6x-4=2(x-1)(x+2)(2x+1)$$

$y'=0$ とすると　　$x=1,\ -2,\ -\dfrac{1}{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$	極大 $\dfrac{33}{16}$	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$



よって，この関数のグラフは右図のようになり，

このグラフと x 軸の共有点の個数は　　4 個

ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　　4 個

2

与えられた方程式を変形すると　　$x^3-12x=a$

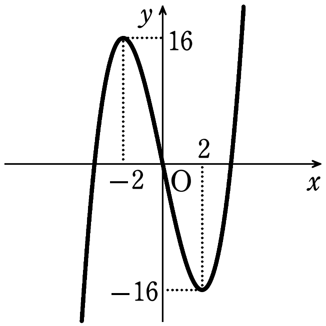
よって，この方程式の実数解の個数は，3 次関数 $y=x^3-12x$ ……① のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

$$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$



ゆえに，関数 ① のグラフは，右図のようになる。

したがって，求める a の値の範囲は　　$-16<a<16$

3

与えられた曲線と直線の共有点の個数は

$$x^3-x=2x+a \quad \text{すなわち} \quad x^3-3x=a$$

の異なる実数解の個数に一致する。

よって，$y=x^3-3x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が 3 個であるような a の値の範囲を求めればよい。

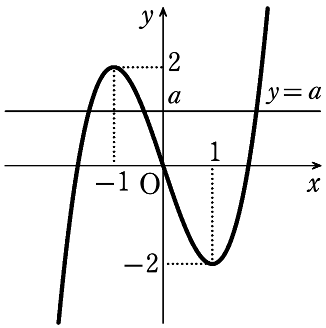
$f(x)=x^3-3x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

よって，求める a の値の範囲は　　$-2<a<2$

4

(1)　$f(x)=2x^3+x^2-5x+1$ とおくと

$f(0)=1$，$f(1)=-1$　　よって　　$f(0)>0$，$f(1)<0$

ゆえに，方程式 $f(x)=0$ は区間 $0<x<1$ に実数解をもつ。

(2)　$f(x)=x^3-3x-1$ とおくと

$f(-2)=-3$，$f(-1)=1$，$f(0)=-1$，$f(1)=-3$，$f(2)=1$

よって，方程式 $f(x)=0$ は

$f(-2)<0$，$f(-1)>0$ から，区間 $-2<x<-1$ に実数解をもつ。

$f(-1)>0$，$f(0)<0$ から，区間 $-1<x<0$ に実数解をもつ。

$f(1)<0$，$f(2)>0$ から，区間 $1<x<2$ に実数解をもつ。

5

(1)　$f(x)=2x^3+1-3x^2$ とおくと　　$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，1

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ のとき $x=1$ で最小値 0 をとる。

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)\geqq 0$　　すなわち　　$2x^3+1\geqq 3x^2$

(2)　$f(x)=x^3-3x^2+6x-4$ とおくと　　$f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3$

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

また　　$f(1)=1-3+6-4=0$

よって，$x>1$ のとき　　$f(x)>f(1)=0$　　すなわち　　$x^3-3x^2+6x-4>0$

$\boxed{6}$

$f(x)=x^4-4x^3+28$ とおくと　　$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 3$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	28	↘	1	↗

よって，$f(x)$ は $x=3$ で最小値 1 をとる。

ゆえに　　$f(x)\geqq 1>0$　　すなわち　　$x^4-4x^3+28>0$

$\boxed{7}$

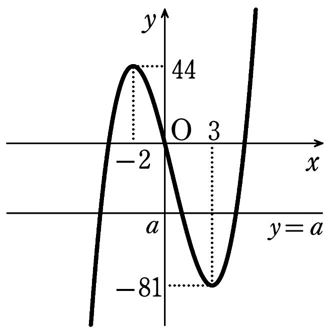
方程式の実数解は，曲線 $y=2x^3-3x^2-36x$　……①と直線 $y=a$　……② の共有点の x 座標である。

$f(x)=2x^3-3x^2-36x$ とおくと　　$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2,\ 3$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 44	↘	極小 -81	↗



よって，曲線①は右図のようになる。

曲線①と直線②が $x>0$ で異なる 2 点を共有し，かつ $x<0$ で 1 点を共有するような a の値の範囲を求めて　　$-81<a<0$

$\boxed{8}$

方程式を変形すると　　$x^4-4x^3-2x^2+12x=a$

よって，方程式の実数解は，

　曲線 $y=x^4-4x^3-2x^2+12x$　……①　　と　　直線 $y=a$　……②

の共有点の x 座標である。

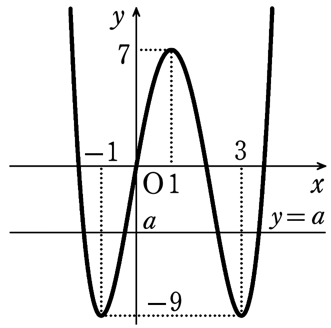
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$ とおくと

　　$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 -9	↗	極大 7	↘	極小 -9	↗

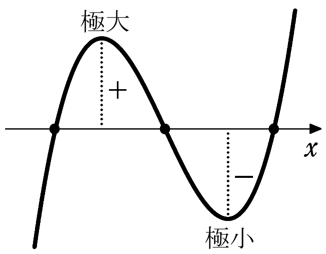


よって，曲線①は右図のようになる。

曲線①と直線②が $x>0$ と $x<0$ のそれぞれにおいて異なる 2 点を共有するような a の値の範囲を求めて

　　$-9<a<0$

$\boxed{9}$



$f(x)=x^3-3ax+a$ とおく。
方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつための条件は，$f(x)$ が極値をもち，更に極大値と極小値が異符号であること，すなわち

$$(極大値)\times(極小値)<0$$

となることである。

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$

$f(x)$ が極値をもつ条件は　　$a>0$

このとき，$f'(x)=0$ から　　$x=\pm\sqrt{a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，求める条件は

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0 \quad すなわち \quad a(2\sqrt{a}+1)\cdot a(-2\sqrt{a}+1)<0$$

ゆえに　　$a^2(1-4a)<0$

$a>0$ より $a^2>0$ であるから　　$1-4a<0$　　したがって　　$a>\dfrac{1}{4}$