数学A　ユークリッドの互除法　演習プリント

$\boxed{1}$

次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　408，119　(2)　322，155　(3)　923，377

(4)　498，223　(5)　629，259　(6)　826，649

(7)　1139，871　(8)　1207，994　(9)　3059，2337

$\boxed{2}$

次の条件を満たす自然数 n をすべて求めよ。

(1)　$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の自然数 n

(2)　$5n+1$ と $6n+4$ の最大公約数が 7 になるような 100 以下の自然数 n

$\boxed{3}$

次のことを証明せよ。

(1)　m が 0 以上の整数のとき，$3m+1$ と $3m+2$ は互いに素である。

(2)　n が自然数のとき，n^2+n+1 と $n+1$ は互いに素である。

$\boxed{4}$

n は自然数とする。n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{5}$

$7n+3$ と $2n+3$ の最大公約数が 5 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　961，217　(2)　833，646　(3)　498，223

(4)　731，301　(5)　957，754　(6)　1273，469

$\boxed{7}$

4984 と 3471 の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

$\boxed{8}$

$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数が 7 になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{9}$

$6n+9$ と $5n+8$ が互いに素になるような 100 以下の自然数 n は全部で何個あるか。

$\boxed{1}$

(1) $408=119\cdot 3+51$

$119=51\cdot 2+17$

$51=17\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　17

(2) $322=155\cdot 2+12$

$155=12\cdot 12+11$

$12=11\cdot 1+1$

$11=1\cdot 11+0$

よって，最大公約数は　1

(3) $923=377\cdot 2+169$

$377=169\cdot 2+39$

$169=39\cdot 4+13$

$39=13\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　13

(4) $498=223\cdot 2+52$

$223=52\cdot 4+15$

$52=15\cdot 3+7$

$15=7\cdot 2+1$

$7=1\cdot 7+0$

よって，最大公約数は　1

(5) $629=259\cdot 2+111$

$259=111\cdot 2+37$

$111=37\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　37

(6) $826=649\cdot 1+177$

$649=177\cdot 3+118$

$177=118\cdot 1+59$

$118=59\cdot 2+0$

よって，最大公約数は　59

(7) $1139=871\cdot 1+268$

$871=268\cdot 3+67$

$268=67\cdot 4+0$

よって，最大公約数は　67

(8) $1207=994\cdot 1+213$

$994=213\cdot 4+142$

$213=142\cdot 1+71$

$142=71\cdot 2+0$

よって，最大公約数は　71

(9) $3059=2337\cdot 1+722$

$2337=722\cdot 3+171$

$722=171\cdot 4+38$

$171=38\cdot 4+19$

$38=19\cdot 2+0$

よって，最大公約数は　19

$\boxed{2}$

(1)　$11n+28=(4n+7)\cdot 2+3n+14$,　$4n+7=(3n+14)\cdot 1+n-7$,
$3n+14=(n-7)\cdot 3+35$

よって，$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数は，$n-7$ と 35 の最大公約数に等しい。

$35=5\cdot 7$ であるから，$n-7$ は 5 の倍数であるが，7 の倍数でない。

また，$-6\leqq n-7\leqq 43$ であるから

$$n-7=-5,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40$$

よって　$n=2,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 47$

(2)　$6n+4=(5n+1)\cdot 1+n+3$,　$5n+1=(n+3)\cdot 5-14$

よって，$5n+1$ と $6n+4$ の最大公約数は，$n+3$ と 14 の最大公約数に等しい。

$14=2\cdot 7$ であるから，$n+3$ は 7 の倍数であるが，2 の倍数でない。

また，$4\leqq n+3\leqq 103$ であるから

$$n+3=7,\ 21,\ 35,\ 49,\ 63,\ 77,\ 91$$

よって　$n=4,\ 18,\ 32,\ 46,\ 60,\ 74,\ 88$

参考　-14 の約数のうち最大のものは 14 であるから，$n+3$ と -14 の最大公約数は，$n+3$ と 14 の最大公約数に等しい。

$\boxed{3}$

(1)　$3m+2=(3m+1)\cdot 1+1$，$3m+1=1\cdot(3m+1)+0$

したがって，$3m+1$ と $3m+2$ の最大公約数は 1 である。

よって，$3m+1$ と $3m+2$ は互いに素である。

(2)　$n^2+n+1=(n+1)\cdot n+1$，$n+1=1\cdot(n+1)+0$

したがって，n^2+n+1 と $n+1$ の最大公約数は 1 である。

よって，n^2+n+1 と $n+1$ は互いに素である。

$\boxed{4}$

$n^2+n+6=(n+5)(n-4)+26$

よって，n^2+n+6 と $n+5$ の最大公約数は，$n+5$ と 26 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，26 の約数の $1,\ 2,\ 13,\ 26$ である。

ここで，$n+5$ と 26 の最大公約数を g とすると，例えば

$n+5=7$ すなわち $n=2$ のとき　$g=1$

$n+5=6$ すなわち $n=1$ のとき　$g=2$

$n+5=13$ すなわち $n=8$ のとき　$g=13$

$n+5=26$ すなわち $n=21$ のとき　$g=26$

となる。

よって，求める数は　$1,\ 2,\ 13,\ 26$

$\boxed{5}$

$7n+3=(2n+3)\cdot 3+n-6$,　$2n+3=(n-6)\cdot 2+15$

よって，$7n+3$ と $2n+3$ の最大公約数は，$n-6$ と 15 の最大公約数に等しい。

$15=3\cdot 5$ であるから，$n-6$ は 5 の倍数であるが，3 の倍数でない。

また，$-5\leqq n-6\leqq 44$ であるから　$n-6=-5,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 35,\ 40$

よって　$n=1,\ 11,\ 16,\ 26,\ 31,\ 41,\ 46$

$\boxed{6}$

(1)　$961=217\cdot 4+93$

$217=93\cdot 2+31$

$93=31\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　31

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 4 \\ 31) & 93 &)\,217 &)\,961 \\ & 93 & 186 & 868 \\ \hline & 0 & 31 & 93 \end{array}$$

最大公約数

(2)　$833=646\cdot 1+187$

$646=187\cdot 3+85$

$187=85\cdot 2+17$

$85=17\cdot 5+0$

よって，最大公約数は　17

$$\begin{array}{rrrrr} & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 17) & 85 &)\,187 &)\,646 &)\,833 \\ & 85 & 170 & 561 & 646 \\ \hline & 0 & 17 & 85 & 187 \end{array}$$

(3)　$498=223\cdot 2+52$

$223=52\cdot 4+15$

$52=15\cdot 3+7$

$15=7\cdot 2+1$

$7=1\cdot 7+0$

よって，最大公約数は　1

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1) & 7 &)\,15 &)\,52 &)\,223 &)\,498 \\ & 7 & 14 & 45 & 208 & 446 \\ \hline & 0 & 1 & 7 & 15 & 52 \end{array}$$

(4)　$731=301\cdot 2+129$

$301=129\cdot 2+43$

$129=43\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　43

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 2 \\ 43) & 129 &)\,301 &)\,731 \\ & 129 & 258 & 602 \\ \hline & 0 & 43 & 129 \end{array}$$

(5)　$957=754\cdot 1+203$

$754=203\cdot 3+145$

$203=145\cdot 1+58$

$145=58\cdot 2+29$

$58=29\cdot 2+0$

よって，最大公約数は　29

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 29) & 58 &)\,145 &)\,203 &)\,754 &)\,957 \\ & 58 & 116 & 145 & 609 & 754 \\ \hline & 0 & 29 & 58 & 145 & 203 \end{array}$$

(6)　$1273=469\cdot 2+335$

$469=335\cdot 1+134$

$335=134\cdot 2+67$

$134=67\cdot 2+0$

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 67) & 134 &)\,335 &)\,469 &)\,1273 \\ & 134 & 268 & 335 & 938 \\ \hline & 0 & 67 & 134 & 335 \end{array}$$

よって，最大公約数は　67

$\boxed{7}$

$4984=3471\cdot 1+1513$

$3471=1513\cdot 2+445$

$1513=445\cdot 3+178$

$445=178\cdot 2+89$

$178=89\cdot 2+0$

よって，最大公約数は　89

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 89) & 178 &)\,445 &)\,1513 &)\,3471 &)\,4984 \\ & 178 & 356 & 1335 & 3026 & 3471 \\ \hline & 0 & 89 & 178 & 445 & 1513 \end{array}$$

$\boxed{8}$

$4n+15=(3n+13)\cdot 1+n+2$

$3n+13=(n+2)\cdot 3+7$

よって，$4n+15$ と $3n+13$ の最大公約数は $n+2$ と 7 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+2$ は 7 の倍数である。

また，$3\leqq n+2\leqq 52$ であるから　　$n+2=7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49$

したがって　　$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ 40,\ 47$

$\boxed{9}$

$6n+9=(5n+8)\cdot 1+n+1$

$5n+8=(n+1)+3$

よって，$6n+9$ と $5n+8$ の最大公約数は $n+1$ と 3 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n+1$ と 3 の最大公約数が 1 になるような n の個数を求めればよい。

$2\leqq n+1\leqq 101$ の範囲で，$n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n は 33 個ある。

したがって，求める自然数 n の個数は　　$100-33=67$（個）