数学B　ベクトル方程式（直線）　演習プリント

$\boxed{1}$

次の点Aを通り，$\vec{d}$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1)　A$(3,\ 5)$，$\vec{d}=(1,\ 2)$　　(2)　A$(4,\ -2)$，$\vec{d}=(2,\ -1)$

(3)　A$(0,\ 2)$，$\vec{d}=(3,\ 1)$

$\boxed{2}$

次の2点を通る直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。

(1)　A$(1,\ 3)$，B$(2,\ 4)$　　(2)　A$(1,\ 2)$，B$(-1,\ 3)$

(3)　A$(-1,\ 0)$，B$(0,\ -2)$

$\boxed{3}$

次の点Aを通り，$\vec{n}$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(3,\ 2)$，$\vec{n}=(4,\ 5)$　　(2)　A$(3,\ -2)$，$\vec{n}=(-4,\ 1)$

(3)　A$(2,\ -1)$，$\vec{n}=(-1,\ 0)$

$\boxed{4}$

次のような直線の方程式を，ベクトルを利用して求めよ。

(1)　点A$(1,\ 2)$を通り，2点B$(1,\ 3)$，C$(3,\ 7)$を通る直線に平行な直線。

(2)　点A$(3,\ -1)$を通り，OAに垂直な直線。ただし，Oは原点とする。

$\boxed{5}$

次の2直線のなす鋭角 α を求めよ。

(1)　$\sqrt{3}\,x+3y-1=0,\ -x+\sqrt{3}\,y-2=0$

(2)　$2x+4y+1=0,\ x-3y+7=0$

$\boxed{6}$

△ABCの頂点A，B，Cの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。直線上の点をP$(\vec{p})$として，次の直線のベクトル方程式を求めよ。

(1)　Aから直線BCへの垂線　　(2)　Aと辺BCの中点を通る直線

(3)　辺BCの垂直二等分線

$\boxed{1}$

(1)　$(x,\ y)=(3,\ 5)+t(1,\ 2)$ から　$\begin{cases} x=3+t \\ y=5+2t \end{cases}$

t を消去して $x-3=\dfrac{y-5}{2}$ から　$2(x-3)=y-5$

よって　$2x-y-1=0$

(2)　$(x,\ y)=(4,\ -2)+t(2,\ -1)$ から　$\begin{cases} x=4+2t \\ y=-2-t \end{cases}$

t を消去して $\dfrac{x-4}{2}=-y-2$ から　$x-4=2(-y-2)$

よって　$x+2y=0$

(3)　$(x,\ y)=(0,\ 2)+t(3,\ 1)$ から　$\begin{cases} x=3t \\ y=2+t \end{cases}$

t を消去して $\dfrac{x}{3}=y-2$ から　$x=3(y-2)$

よって　$x-3y+6=0$

$\boxed{2}$

(1)　$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 3)+t(2,\ 4)$ から　$\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \end{cases}$

参考　$(x,\ y)=(1-t)(2,\ 4)+t(1,\ 3)$ から　$\begin{cases} x=2-t \\ y=4-t \end{cases}$

でもよい。（一般に，媒介変数表示の仕方は1通りではない）

(2)　$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 2)+t(-1,\ 3)$ から　$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \end{cases}$

(3)　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 0)+t(0,\ -2)$ から　$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \end{cases}$

$\boxed{3}$

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ から　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y-2)$，$\vec{n}=(4,\ 5)$ から

$4(x-3)+5(y-2)=0$　すなわち　$4x+5y-22=0$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+2)$，$\vec{n}=(-4,\ 1)$ から

$-4(x-3)+(y+2)=0$　すなわち　$4x-y-14=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y+1)$，$\vec{n}=(-1,\ 0)$ から

$-(x-2)+0\cdot(y+1)=0$　すなわち　$x=2$

$\boxed{4}$

(1)　求める直線は，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ 4)$ が方向ベクトルである直線である。

よって　$4(x-1)-2(y-2)=0$　ゆえに　$2x-y=0$

(2)　求める直線は，点 $\mathrm{A}(3,\ -1)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -1)$ が法線ベクトルである直線である。

よって　$3(x-3)-\{y-(-1)\}=0$　ゆえに　$3x-y-10=0$

$\boxed{5}$

与えられた直線を順に ①，② とする。

(1)　$\vec{m}=(\sqrt{3},\ 3)$，$\vec{n}=(-1,\ \sqrt{3})$ とすると，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は，それぞれ直線 ①，② の法線ベクトルである。

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると，求める角 α は θ または $180°-\theta$ に等しい。

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}\times(-1)+3\times\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

$0°<\alpha<90°$ であるから　$\alpha=60°$

(2)　$\vec{m}=(2,\ 4)$，$\vec{n}=(1,\ -3)$ とすると，$\vec{m}$，$\vec{n}$は，それぞれ直線 ①，② の法線ベクトルである。

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると，求める角 α は θ または $180°-\theta$ に等しい。

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2\times1+4\times(-3)}{\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=135°$

$0°<\alpha<90°$ であるから　$\alpha=180°-135°=45°$

$\boxed{6}$

(1)　点 A を通り，BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　　すなわち　　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　($(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ でもよい)

(2)　辺 BC の中点を $\mathrm{M}(\vec{m})$ とすると　　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，求めるベクトル方程式は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{m}$ (t は実数)　　すなわち　　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (t は実数)

(3)　辺 BC の中点 M を通り，辺 BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　　すなわち　　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

整理して　　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$