高２物理　4月25日（土）　水平投射　　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

水平投射

水平投射された物体の運動を水平方向と鉛直方向に分解してみると，水平方向には等速度で運動し，鉛直方向には自由落下とまったく同じ運動(加速度が，鉛直下向き，大きさ g の等加速度運動)をしていることがわかる。

また，時間 Δt ごとの速度ベクトル $\vec{v_0}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, …… の始点を重ねると，速度ベクトルの変化 $\Delta\vec{v}$ は，すべて等しい大きさ $g\Delta t$ で，鉛直下向きとなっている。すなわち，水平投射された物体に生じている加速度は，自由落下，鉛直投げおろし，鉛直投げ上げと同じで，鉛直下向きに一定の大きさ g である。

図 26 のように，投げ出された点を座標の原点Oとして，初速度 $\vec{v_0}$ の向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。投げ出されたときを時刻 0 として，時刻 t における物体の位置Pの座標を $(x,\ y)$，速度 $\vec{v}$ の x, y 成分を $(v_x,\ v_y)$ とする。物体は，x 軸方向には正の向きに速さ v_0 の等速度運動をするから，

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 t \quad \cdots ①$$

がなりたつ。また，y 軸方向には初速度が 0 で，加速度 g の等加速度運動をするから，次式がなりたつ。

$$v_y = gt$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots ②$$

$$v_y^2 = 2gy$$

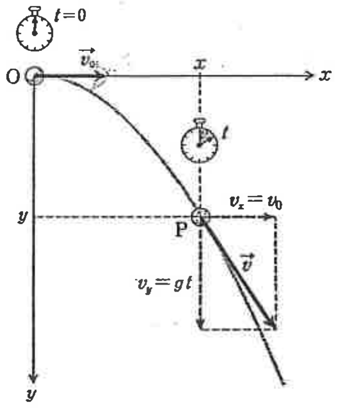


図 26　水平投射の運動の分解

時刻 t での物体の速さ v は，

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

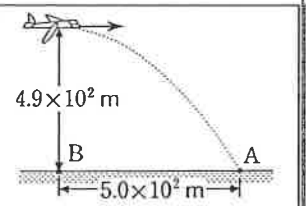
と表される。また，式①，②から t を消去すると，

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

となり，これは空中に放たれた物体が運動する道筋(軌跡)を表す。このため，一般にこのような２次式で表される曲線を放物線という。また，空中に放たれた物体の運動を放物運動という。

1

地上から 4.9×10^2 m の高さを一定の速さで水平に飛んできた飛行機が，点 A に物資を投下しようとして，点 A より 5.0×10^2 m 手前にある点 B の真上を通過した瞬間に物資を静かに投下した。

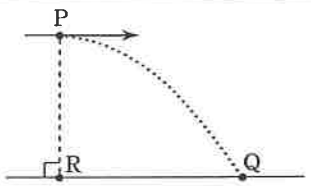


(1)　物資を投下してから地面に達するまでの時間は何秒か。

(2)　物資が点 A に落下するためには，飛行機の飛行速度は何 m/s でなければならないか。

2

机の端の点 P から小球を水平に投げ出す。床上の落下点を Q とし，P 点の真下の床上の点を R とする。

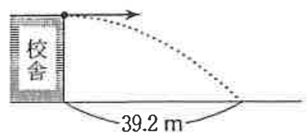


(1)　初速度を 2 倍にすると，落下時間は何倍になるか。

(2)　初速度を 2 倍にすると，QR 間の距離は何倍になるか。

3

校舎の屋上から水平方向にボールを打ちだしたところ，ボールはちょうど 2.00 秒後に，校舎の真下から 39.2 m 離れた地面に落下した。
重力加速度の大きさは 9.80 m/s² とする。



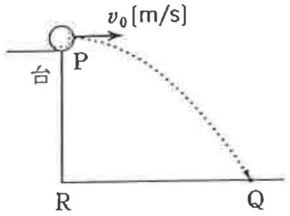
(1)　校舎の高さ h[m] を求めよ。

(2)　打ちだしたボールの初速度 v_0[m/s] を求めよ。

(3)　ボールが地面に落下するときの水平方向の速さ v_x[m/s] と鉛直方向の速さ v_y[m/s] を求めよ。

4

ある高さの台の端点Pより，小球を初速度 v_0[m/s] で水平投射したところ，投射後 0.70 s 後に床に落下した。点Pの真下の床上の点をR，小球が落下した床上の点をQとする。水平投射した物体の運動の特徴を考えて，次の各問いに答えよ。



(1) 初速度を $2v_0$[m/s] にすると，次の量は何倍になるか。

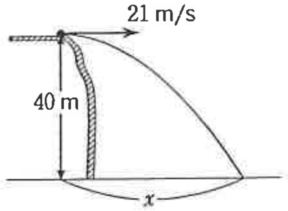
① 投射してから床上に達するまでの時間

② R，Q 間の距離

(2) この台の高さ PR は何 m か。

5

高さ 40 m のがけの上から，海に向かって小石を水平に速さ 21 m/s で投げ出した。重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とする。



(1) 投げ出してから小石が海面に落下するまでの時間 t[s] を求めよ。

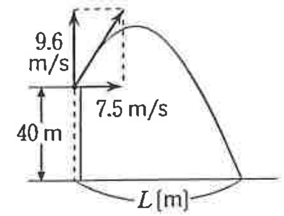
(2) 海面に落下するまでに小石が水平方向に飛んだ距離 x[m] を求めよ。

(3) 海面に落下するときの，小石の鉛直方向の速さ v_y[m/s] を求めよ。

(4) 海面に落下するときの小石の速さ v[m/s] を求めよ。

6

地上 40 m のビルの屋上から小石を斜め上方に投げ上げる。初速度の水平成分を 7.5 m/s，鉛直成分を 9.6 m/s とする。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



(1) 小石が地面に達するのは投射何秒後か。

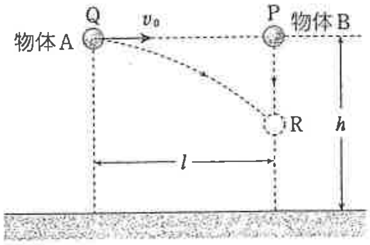
(2) 小石の着地点と投射点の水平距離を L[m] とする。L は何 m か。

物理II

発展例題❸　水平投射と自由落下

▶発展問題 36, 38

地上からの高さ h の点Pにある物体Bをめがけて，物体Aを同じ高さで l だけ離れた点Qから水平に初速度 v_0 で投げ出した。物体Aが投げ出された瞬間に物体Bは自由落下を始めたので，2物体は点Pの真下の点Rで衝突した。重力加速度の大きさを g として，次の問に答えよ。



(1)　物体Aが点Rに達するまでの時間を求めよ。

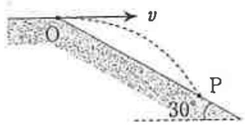
(2)　地上に達するまでに2物体が衝突するためには v_0 はいくらを越えていなければならないか。

物理II

発展例題❹　斜面への投射

▶発展問題 39

図でOPは傾きが30°の斜面である。上端Oから水平に初速度 v で小球を投げ出した。小球が斜面に落下する点をPとする。OPの距離を求めよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。



4/18 の 解答

$\boxed{1}$

(1) $v=v_0+at$ より　$12=0+3.0a$　　ゆえに　$a=4.0\ (\mathrm{m/s^2})$

(2) $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ より　$x=0+\frac{1}{2}\times4.0\times3.0^2=18\ (\mathrm{m})$

$\boxed{2}$

(1) 加速度を $a\,[\mathrm{m/s^2}]$（運動の向きを正）とすると $v=v_0+at$ より

　　$16.0=10.0+a\times3.0$　　ゆえに　$a=2.0\ \mathrm{m/s^2}$

(2) 進んだ距離を $x\,[\mathrm{m}]$ とすると $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ より

　　$x=10\times3.0+\frac{1}{2}\times2.0\times3.0^2$　　ゆえに　$x=39\ \mathrm{m}$

　注　$v^2-v_0{}^2=2ax$ からも求めることができる。

(3) 加速度を $a'\,[\mathrm{m/s^2}]$（運動の向きを正）とすると　$0^2-16^2=2a'\times40$

これから　$a'=-3.2\ \mathrm{m/s^2}$

ゆえに，運動の向きと逆向きに大きさ $3.2\ \mathrm{m/s^2}$

$\boxed{3}$

(1) 問題の v-t 図の傾きより

0〜10 秒では

$a=\frac{10}{10}=1.0\,(\mathrm{m/s^2})$

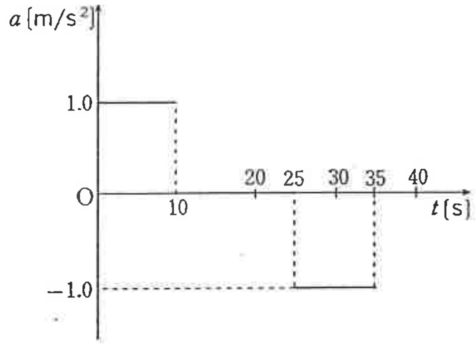
10〜25 秒では

$a=\frac{0}{15}=0\,(\mathrm{m/s^2})$

25〜35 秒では

$a=\frac{-10}{10}=-1.0\,(\mathrm{m/s^2})$

よって，右図のような a-t 図が得られる。



(2) $h\,[\mathrm{m}]$ は v-t 図が囲む台形の面積であるから

$h=\frac{(15+35)\times10}{2}=250\fallingdotseq2.5\times10^2\ (\mathrm{m})$

$\boxed{4}$

(1) 加速度は v-t 図の傾きで表される。

加速度 $a=\frac{-6.0}{3.0}=-2.0\ (\mathrm{m/s^2})$

(2) $0<t<3.0$ の間は速度 $v>0$ であり，物体は原点から遠ざかる運動をする。したがって，$t=3.0$ s のとき物体は原点から最も遠ざかる。

　また，最も遠ざかる位置は，原点から 3.0 s 間に物体が進んだ距離に等しく，それは図で $t=3.0$ s の直線と v 軸および t 軸とで囲まれた面積に等しい。

$\boxed{1}$

(1) 台車が静止しているときも，等速度で走っているときも，発射させた小球の初速度の鉛直上向きの速さは同じであるから，同じ高さまで上昇する。

　したがって　$H=h$　①

(2) 投射後，空中を飛んでいるときの小球の水平方向の速さは，台車の速さと同じである。したがって，装置 A に落下する。③

$\boxed{2}$

$\boxed{指針}$ 自由落下の式から導く。

2.0 秒間の落下距離なので

　$h=\frac{1}{2}\times9.8\times2.0^{2}$ ←※A $=19.6\,(\mathrm{m})$　　ゆえに　20 m

※A　$y=\frac{1}{2}gt^2$ を使う。

$\boxed{3}$

　窓の高さを $h\,[\mathrm{m}]$，地面に達する直前のボールの速さを $v\,[\mathrm{m/s}]$ とする。

$h=\frac{1}{2}gt^2$ より　$h=\frac{1}{2}\times9.8\times1.0^2=4.9\ (\mathrm{m})$

$v=gt$ より　$v=9.8\times1.0=9.8\ (\mathrm{m/s})$

$\boxed{4}$

(1) 最高点では速度 $v=0\ \mathrm{m/s}$ であるから，$v=v_0-gt$　の式より　$0=9.8-9.8\times t_1$

　ゆえに　$t_1=1.0$ s

　また，その高さ $h\,[\mathrm{m}]$ は　$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$　の式より

　$h=9.8\times1.0-\frac{1}{2}\times9.8\times1.0^2=4.9\ (\mathrm{m})$

(2) もとの位置では高さ $y=0$ m であるから，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$　の式より

　$0=9.8t_2-\frac{1}{2}\times9.8t_2{}^2$　ゆえに　$t_2=2.0$ s

　そのときの速度 $v_2=v_0-gt_2=9.8-9.8\times2.0=-9.8\ (\mathrm{m/s})$

(3) $t_3=t_2-t_1=2.0-1.0=1.0\ (\mathrm{s})$

$\boxed{5}$

(1)　最高点では速度 v が一瞬 0 になるので，$v=v_0-gt$ より

　　$0=29.4-9.80t_1$　　$t_1=3.00$ s

(2)　$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ より

　　$h=29.4\times3.00-\frac{1}{2}\times9.80\times3.00^2$

　　$=88.2-44.1=44.1\ (\mathrm{m})$

(3)　最高点を境に上り下りが対称的なので

　　$t_2=2t_1=2\times3.00=6.00\ (\mathrm{s})$

(4)　ビルの高さとは，7 秒後の $|y|$ である。

　　$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

　　$=29.4\times7.00-\frac{1}{2}\times9.80\times7.00^2$

　　$=-34.3$　　よって　34.3 m

鉛直方向

小球を発射する装置の初速 V_0

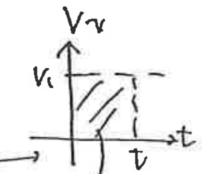
台車の速度を V_1

つまり，小球は

水平方向は　$V_x=V_1$（等速）

$x_A=V_1t$

鉛直方向は　$V_y=V_0-gt$ ということ．



1

解説

(1) 物資の運動は水平投射であるから，放物線を描いて落下していくが，地面に達するまでの時間 t[s] は，4.9×10^2 m の高さから物資を自由落下させる場合と同じである。

$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ の式より　$4.9\times10^2=\dfrac{1}{2}\times9.8t^2$

ゆえに　$t=10$ s

(2) 求める飛行速度を v[m/s] とすると，飛行機の水平方向の運動は等速直線運動であるから，$x=v_0t$ の式より

$5.0\times10^2=v\times10$　ゆえに　$v=50$ m/s

2

解説

指針 | 水平方向は等速度運動として，鉛直方向は自由落下として考える。鉛直方向の運動は自由落下と同じ。したがって，水平方向の初速度や小球の質量によらず，みな同じ落ち方になる。

(1) 鉛直方向は自由落下で，水平方向の初速度の大きさによらない。ゆえに，落下時間は変わらない。1 倍。

(2) 落下時間は変わらない。したがって，水平方向の初速度を 2 倍にすると，落下点までの水平距離も 2 倍となる。

3

解説

指針 | ボールの運動を水平方向の等速度運動と，鉛直方向の自由落下運動とに分けて考える。校舎の屋上に原点を，水平方向に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。

(1) 校舎の高さは，鉛直方向への 2.00 秒間の落下距離に等しいので

$h=\dfrac{1}{2}\times9.80\times2.00^{2\to※A}=19.6$ (m)

(2) $39.2=v_0\times2.00$　　ゆえに　$v_0=19.6$ m/s

(3) 水平方向は等速度であるから　$v_x=v_0=19.6$ m/s

鉛直方向は自由落下であるから　$v_y=9.80\times2.00^{\to※B}=19.6$ (m/s)

※A　$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ を使う。

※B　$v_y=gt$ を使う。

4

解説

(1) ① 水平投射では，鉛直方向には自由落下運動と同様の運動をしているので，初速度 v_0 を変えても床への落下時間は同じである。したがって，1 倍。

② 水平方向には等速直線運動と同様の運動をしているので，①により床への落下時間は同じであるから，初速度を v_0 の 2 倍の $2v_0$ にすると，R，Q 間の距離は 2 倍になる。

(2) 鉛直方向には自由落下運動と同様の運動をしているので，$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ の式を用いる。

0.70 s 後に床に落下したから，台の高さ PR は　$y=\dfrac{1}{2}\times9.8\times0.70^2\fallingdotseq2.4$ (m)

5

解説

指針 | 小石の運動を水平方向の等速度運動，鉛直方向の自由落下運動とに分けて考える。

小石を投げ出した位置を原点に，水平方向 (小石を投げた向き) に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。

(1) $40=\dfrac{1}{2}\times9.8\times t^{2\to※A}$　　$t^2=\dfrac{40}{4.9}$　$t>0$ より

$t=\sqrt{\dfrac{40}{4.9}}=\sqrt{\dfrac{400}{49}}=\dfrac{20}{7}\fallingdotseq2.85$ (s)

よって　2.9 s

(2) $x=21\times\dfrac{20}{7}=60$ (m)

(3) 落下するときの鉛直方向の速さは，

$v_y=9.8\times\dfrac{20}{7}^{\to※B}=28$ (m/s)

(4) 水平方向の速さ v_x は 21 m/s であるから

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}^{\to※C}=\sqrt{21^2+28^2}=7\sqrt{3^2+4^2}=7\times5$

$=35$ (m/s)

※A　$y=\dfrac{1}{2}gt^2$ を使う。

※B　$v_y=gt$ を使う。

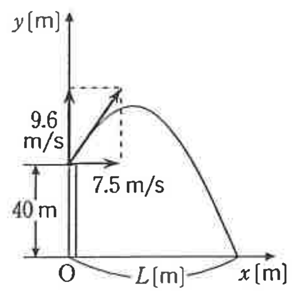
※C　$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ を使う。

6

解説

指針 | 小石の運動を水平方向と鉛直方向に分けて考える。

(1) 右図のように O を原点として座標軸を定める。小石の y 軸方向の運動は，40 m の位置から初速度 9.6 m/s，加速度 -9.8 m/s² の等加速度運動 (鉛直投射) だから，t[s] 後の変位 y[m] は



$y=40+9.6t-4.9t^{2\to※A}$

$y=0$ として

$49t^2-96t-400=0$

$(49t+100)(t-4)=0$

$t>0$ より　$t=4.0$ s

(2) 小石は，水平方向には速さ 7.5 m/s の等速直線運動をするから，t[s] 後の変位 x[m] は　$x=7.5t$

(1) より，小石が地面に達するのは 4.0 s 後であるから，水平距離は

$L=7.5\times4.0=30$ (m)

※A　斜方投射の鉛直方向の運動の式

$y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$ で　$v_0\sin\theta\to9.6$ m/s

$\dfrac{1}{2}g\to4.9$ m/s²

また，$t=0$ のとき $y=40$ であることから (1) の変位の式になる。

例題3

考え方

(1)　物体Aは水平方向に速さ v_0 の等速直線運動をする。

(2)　物体Aは鉛直方向に初速度0の自由落下運動を，物体Bは自由落下運動をする。

解答

(1)　物体Aは水平方向には速さ v_0 で等速運動を行い，QR間は水平距離で l だけ離れているから，衝突するまでの時間を t とすると，

$$t=\frac{l}{v_0}$$

(2)　衝突するときのBの落下距離 y は，

$$y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{gl^2}{2v_0^2}$$

地上に達するまでに2物体が衝突するためには，

$y<h$

$$\frac{gl^2}{2v_0^2}<h$$

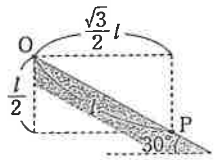
$$v_0>\sqrt{\frac{g}{2h}}l$$

$$\sqrt{\frac{g}{2h}}l$$

例題 4

考え方

OP間の距離を l とする。投げ出してから時間 t 後に点Pに落下したとすると，その間に水平方向には $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ 進み，鉛直方向には $\frac{l}{2}$ 落下する。



解答

OP間の距離を l とし，投げ出してから落下するまでの時間を t とする。

水平方向には等速運動で，$vt=\frac{\sqrt{3}}{2}l$

鉛直方向には自由落下で，$\frac{1}{2}gt^2=\frac{l}{2}$

2式から t を消去し，$l>0$ なので，

$$\therefore l=\frac{4v^2}{3g}$$